Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1

(*adapté de ENSAIT 1988*)

Partie I

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. (a) Montrer que, pour tous réels $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$
   (b) Montrer que tout élément f de F appartient à E.
   (c) En déduire que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array}$ où $\alpha > 0$.

   Pour quelles valeurs de α, f est-elle un élément de F ?
3. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \end{array}$ où $\alpha > 0$.

   Pour quelles valeurs de α, f est-elle un élément de F ?
4. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t)^n \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}$.

   f est-elle un élément de E ? de F ?

Partie II

Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln^n(t)}{(1-t)^\alpha} \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Déterminer à quelle condition sur α et n, f est un élément de G.

2. Soit $f \quad : \quad \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} \end{array}$

   (a) Montrer que f est un élément de G.

   (b) Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ sur $]0,1[$.

   (c) On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

   On pourra poser le changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$.

   (d) Déterminer quatre réels (a,b,c,d) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \qquad \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

   (e) En déduire la valeur de I via une intégration par parties

---

Exercice 2
(*Banque PT, Maths C 2022*)

1. Pour tout entier naturel non nul, n, on pose :

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u$$

   (a) Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale H_n.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u$

   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u$

   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$

2. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on note $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$.

   On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x}\,\mathrm{d}x, \qquad , \qquad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

   (a) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[2n]{x}$?

   (b) Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence des intégrales K_n et L_n.

   (c) Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.

   (d) Étudier le sens de variation de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (e) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4}$$

   (f) En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (K_n + L_n) \geqslant \frac{\pi}{4}$$

3. (a) Pour tout entier naturel non nul n, effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2n}$ dans l'intégrale $(K_n + L_n)$, puis donner, pour tout entier naturel non nul, une relation entre $(K_n + L_n)$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \mathrm{d}u$$

(b) En déduire l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{H}{n}$$

Exercice 3

(*adapté de Centrale PC 2015*)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Partie I

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. (a) i. Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f.
   ii. Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
   On pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (y,-x)$.
   (b) i. Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
   ii. Déterminer les sous-espaces stables de l'endomorphisme canoniquement associé à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
2. (a) Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est un sous-espace stable par f
   (b) Montrer que s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \geqslant 2$, alors il existe une infinité de droites de E stables par f.
   (c) On suppose **dans cette question uniquement** que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.

   Soit x et y deux vecteurs non nuls de E
   i. Montrer que si x et y sont colinéaires, alors il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ et $f(y) = \alpha y$.
   ii. Montrer que si (x,y) est libre, alors il existe un réel α' tel que $f(x+y) = \alpha'(x+y)$ et $f(y) = \alpha' y$ et $f(x) = \alpha' x$.
   iii. Que dire alors de f ?

Partie II

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tel qu'il existe un entier p et un p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts vérifiant

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $E_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$ et $E_i \neq \{0_E\}$.

1. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

   (a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ est stable par f.

(b) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F.

Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $E_1\times\cdots\times E_p$ tel que $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i$.

(c) Si on pose $H_x=\{i\in[\![1,p]\!]\,|\,x_i\neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les espaces vectoriels E_i, on peut supposer que $H_x=[\![1,r]\!]$ avec $1\leqslant r\leqslant p$. Ainsi on a $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}x_i$ avec $x_i\in E_i\setminus\{0\}$ pour tout i de $[\![1,r]\!]$.

On pose $V_x=\mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_r)$.

Montrer que $\mathscr{B}_x=(x_1,\ldots,x_r)$ est une base de V_x.

(d) Montrer que pour tout j de $[\![1,r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$.

(e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

(f) En déduire que pour tout i de $[\![1,r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

2. Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p=n$.

(a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

(b) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

(c) Si $n\geqslant 3$ et $k\in[\![2,n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

(d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

Exercice 4

(adapté de EDHEC ECS 2020)

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n\geqslant 2$).

Partie I — Préliminaires

1. On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p\circ p=p$.

(a) Montrer que $E=\mathrm{Ker}(p)\bigoplus\mathrm{Im}(p)$

(b) Établir que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p)$

(c) Notons $r=\mathrm{Rang}(p)$. Montrer qu'il existe une base $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E telle que

$$\forall k\in[\![1,r]\!],\quad p(e_k)=e_k,\qquad\qquad \forall k\in[\![r+1,n]\!],\quad p(e_k)=0_E$$

(d) En écrivant la matrice de p dans la base $(e_1,\cdots,e_n)$, montrer que

$$\mathrm{Rg}(p)=\mathrm{Tr}(p)$$

2. Montrer par récurrence sur k ($k\in\mathbb{N}^*$) que, si $E_1,\ldots,E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1+\cdots+E_k)\leqslant\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_k)$$

Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q=p_1+p_2$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $q=p_1+p_2$ soit un projecteur.

1. Montrer que, si $p_1\circ p_2=p_2\circ p_1=0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q est un projecteur.

On suppose désormais que q est un projecteur.

2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(q)\subset\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$

(b) Justifier que $\mathrm{Rang}(q)=\mathrm{Rang}(p_1)+\mathrm{Rang}(p_2)$ et que

$$\dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2))\leqslant\dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2))$$

   (c) En déduire que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$ puis que $\mathrm{Im}(p_1 + p_2) = \mathrm{Im}(p_1) \bigoplus \mathrm{Im}(p_2)$

3. (a) Soit $x \in E$, montrer que $p_1(x) \in \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $q \circ p_1 = p_1$ et $q \circ p_2 = p_2$.
   (c) En déduire qu'alors $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
4. Conclure

Partie III — Généralisation

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et on note $q_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$. On veut généraliser le résultat précédente à une somme de $k \geqslant 2$ projecteurs.

1. Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors q_k est un projecteur.

   On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   (b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\mathrm{Rang}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.
   (c) Établir finalement l'égalité

$$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \bigoplus \ldots \bigoplus \mathrm{Im}(p_k)$$

3. (a) Montrer que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
   (b) En déduire que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a : $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0$.
   (c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Partie I

1. (a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{a^2+b^2}{2}-|ab|=\frac{|a|^2+|b|^2-2|a|\times|b|}{2}=\frac{(|a|-|b|)^2}{2}\geqslant 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad |ab|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}}$$

(b) Soit $f\in F$, on a alors, pour t$\in]0,1]$, $|f(t)|\leqslant\dfrac{f^2(t)+1}{2}$

Or $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ convergent, ainsi, par linéarité $\displaystyle\int_0^1\frac{f^2+1}{2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par critère de majoration on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors absolument convergente donc convergente.

Ainsi $\boxed{f\in E}$.

(c) On a vu que $F\subset E$. Puisque la fonction nulle appartient à F, F est non vide.

Soit $(f,g)\in F^2$ et $\lambda\in R$, alors, pour $t\in]0,1]$

$$\begin{aligned}(f(t)+\lambda g(t))^2&=f(t)^2+2\lambda f(t)g(t)+\lambda^2g(t)^2\\&\leqslant f(t)^2+|\lambda|\left(f(t)^2+g(t)^2\right)+\lambda^2g(t)^2\\&\leqslant(1+|\lambda|)f^2(t)+(|\lambda|+\lambda^2)g(t)^2\end{aligned}$$

Par linéarité $\displaystyle\int_0^1(1+|\lambda|)f^2(t)+(|\lambda|+\lambda^2)g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par majoration $\displaystyle\int_0^1(f(t)+\lambda g(t))^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $f+\lambda g\in F$

Finalement F est un sous-espace vectoriel de E et donc $\boxed{F\text{ est un }\mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

2. f est un élément de F si et seulement si $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le cours cette intégrale (de Riemann) converge si et seulement si $2\alpha<1$.

Ainsi $\boxed{f\in F\text{ si et seulement si }\alpha<\frac{1}{2}.}$

3. La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale n'est donc impropre qu'en 0.

Au voisinage de 0 on a $\dfrac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^{2\alpha-2}}$.

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{2\alpha-2}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $2\alpha-2<1$.

Ainsi $\boxed{f\in F\text{ si et seulement si }\alpha<\frac{3}{2}.}$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, par croissance comparée on sait que $\displaystyle\lim_{t\to0}\sqrt{t}\ln(t)^n=0$.

Ainsi $\ln(t)^n\underset{t\to0}{=}o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est positive.

Ainsi, par critère de négligeabilité, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f \in F \text{ et donc } f \in E.}$

Partie II

Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. f est continue sur $]0,1[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^n(t)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ n'est impropre qu'en 0 et en 1.

   — Au voisinage de 0 on a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)^n|$.

   Or $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t)^n\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente quelle que soit la valeur de n.

   Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

   — Au voisinage de 1 on a $|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{|(t-1)^n|}{(1-t)^\alpha} = \dfrac{1}{(1-t)^{\alpha-n}}$.

   Or, par critère de Riemann, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{\alpha-n}}$ converge si et seulement si $\alpha - n < 1$.

   Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - n < 1$.

   Finalement $\boxed{f \text{ est un élément de } G \text{ si et seulement si } \alpha - n < 1.}$

2. Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} \end{array}$

   (a) Pour $t \in]0,1[$ on a

   $$|f(t)| = \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}\frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$

   Comme $\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 1$ la question précédente nous assure que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Ainsi, par majoration, $\boxed{f \text{ est bien un élément de } G.}$

   (b) φ est dérivable sur $]0,1[$ et, pour $t \in]0,1[$, on a

   $$\varphi'(t) = \frac{-\frac{-(t+1)-(1-t)}{(t+1)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{t+1}}} = \frac{-1}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} < 0$$

   $\boxed{\varphi \text{ est donc strictement décroissante.}}$

   De plus on a $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} = \varphi(t) = 0$.

   Le théorème de la bijection continue nous assure alors que φ est une bijection de $]0,1[$ vers $]0,1[$.

   (c) La licéité du changement de variable a été prouvé à la question précédente.

   Pour $t \in]0,1[$ on a $\varphi(t)^2 = \dfrac{1-t}{1+t}$, d'où $t = \dfrac{1-\varphi(t)^2}{1+\varphi(t)^2}$

Valeur

La fonction $t \mapsto \ln(t)^n$ ne va pas se primitiver de façon explicite mais ces intégrales peuvent se calculer explicitement. Le changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$ donne $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n\Gamma(n+1)$ en reconnaissant la fonction Γ. On a ainsi $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n n!$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -\ln(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(0)} -\ln\left(\frac{1-\varphi(t)^2}{1+\varphi(t)^2}\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x}$$

(d) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \qquad \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \qquad \frac{4x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(ax+b)(x+1)}{x^2+1} + c + \frac{d(x+1)}{x-1}$$

En faisant tendre x vers -1 on obtient alors $c=-1$

De même

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \qquad \frac{4x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(ax+b)(x-1)}{x^2+1} - \frac{(x-1)}{x+1} + d$$

En faisant tendre x vers 1 on obtient alors $d=1$

En évaluant en 0 on obtient $0 = b-1-1$, d'où $b=2$.

Pour obtenir a on peut évaluer en un autre réel ou bien exploiter des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x \times \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = 0, \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x \times \left(\frac{ax+2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) = a$$

Ainsi $a=0$.

Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \qquad \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$$

(e) Soit $A \in]0,1[$, pour $x \in]0,A]$ posons $u(t) = x$ et $v(x) = \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et on a $\lim\limits_{x\to 0} u(x)v(x) = 0$

Pour $x \in]0,A]$ on a $v'(x) = \dfrac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
int_0^A \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= int_0^A u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= u(A)v(A) - \lim_{x\to 0} u(x)v(x) - \int_0^A u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= Av(A) - \int_0^A \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Av(A) - \int_0^A \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= Av(A) - [2\arctan(x) - \ln(1+x) + \ln(1-x)]_0^A \\
&= A\ln(1-A^2) - A\ln(1+A^2) - 2\arctan(A) + \ln(1+A) - \ln(1-A) \\
&= A\ln(1-A) + A\ln(1+A) - A\ln(1+A^2) - 2\arctan(A) + \ln(1+A) - \ln(1-A) \\
&= (A-1)\ln(1-A) + A\ln(1+A) - A\ln(1+A^2) - 2\arctan(A) + \ln(1+A)
\end{aligned}$$

Par croissance comparées $\lim_{A\to 1}(A-1)\ln(1-A) = 0$ et donc

$$\lim_{A\to 1}(A-1)\ln(1-A)+A\ln(1+A)-A\ln(1+A^2)-2\arctan(A)-\ln(1+A) = 0+\ln(2)+\ln(2)-2\arctan(1)-\ln(2) = \ln(2)-\frac{\pi}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - \frac{\pi}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) Soit n entier naturel non nul fixé.

   Pour $u \geqslant 0$, on a $1 + u^{4n} = 1 + (u^{2n})^2 > 0$, donc la fonction intégrée est bien continue sur $[0, +\infty[$.

   L'intégrale H_n est par conséquent seulement impropre en $+\infty$.

   $$\frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}}$$

   Or, puisque$n \geqslant 1$, $2n \geqslant 2 > 1$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}}\mathrm{d}u$ est une intégrale de Riemann convergente.

   Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on peut en conclure que $\boxed{\text{l'intégrale } H_n \text{ est convergente.}}$

   (b) Pour $n \geqslant 1$ on a

   $$\int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

   donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u = 0}$

   (c) Pour $u \geqslant 0$, on a

   $$0 \leqslant \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leqslant \frac{u^{2n}}{u^{4n}} = \frac{1}{u^{2n}}$$

   Donc par propriété de croissance des intégrales (ces intégrales étant bien convergentes, nous l'avons prouvé en 1.(a)), on peut écrire :

   $$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}}\mathrm{d}u$$

   Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2n-1}$

   Ainsi

   $$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2n-1}$$

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u = 0}$$

(d) D'après la relation de Chasles, $H_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u$

— Nous avons prouvé à la question 1)c) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u = 0$

— Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u = 0$

$$\forall u \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leqslant u^{2n}$$

car $1+u^{4n} \geqslant 1$

Donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u$

Or on a montré en 1.(b) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u = 0$

Finalement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = 0}$

2. (a) $\sqrt[2n]{x} = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{2n}\right)$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt[2n]{x} = 0}$

(b) — L'intégrale K_n est impropre en 0, mais comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt[2n]{\tan(x)} = 0$ (en utilisant la question précédente et le fait que $\displaystyle\lim_{x\to0} \tan(x) = 0$), la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0, ce qui implique que l'intégrale K_n est **faussement impropre en** 0.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } K_n \text{ est convergente}}$.

— L'intégrale L_n est impropre en $\dfrac{\pi}{2}$, car tan n'est pas définie en $\dfrac{\pi}{2}$.

On va ramener le problème en 0 en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, qui est bijectif de $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. On a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$, donc

$L_n = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt[2n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}}\mathrm{d}u$ ont même nature.

Cette dernière intégrale est impropre en 0.

Or $\displaystyle\sqrt[2n]{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \underset{u\to0}{\sim} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}}$

D plus $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{u^{1/2n}}\mathrm{d}u$ est une intégrale de Riemann convergente car $\dfrac{1}{2n} < 1$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } L_n \text{ est convergente}}$.

> **Changement de variables**
> Les changements de variables « compliqués »vous seront en général donnés. Par contre les changements de variables affines, plus simples et plus naturels, ne le seront en général pas.

(c) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $K_n \leqslant K_{n+1}$:

On sait que, pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan(x) \in]0,1]$ et donc $\ln(\tan(x)) < 0$.

Ainsi $\dfrac{\ln(\tan(x))}{2n} \leqslant \dfrac{\ln(\tan(x))}{2n+2}$ et donc par croissance de l'exponentielle $\exp\left(\dfrac{\ln(\tan(x))}{2n}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\ln(\tan(x))}{2n+2}\right)$.

On utilise ensuite la propriété de croissance de l'intégrale pour affirmer que $K_n \leqslant K_{n+1}$.

— Montrons que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée :

Pour $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $\tan(x) \in]0,1]$, donc $\sqrt[2n]{\tan(x)} \leqslant 1$

Par propriété de croissance de l'intégrale,

$$K_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Finalement $\boxed{\text{La suite } (K_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante et majorée par } \frac{\pi}{4}}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geqslant 1$, donc $\ln(\tan(x)) \geqslant 0$, d'où $\exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right) \geqslant \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n+2}\right)$.

Par propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit que $L_{n+1} \leqslant L_n$.

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (L_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(x) \geqslant 1$, donc $\ln(\tan(x)) \leqslant 0$, d'où $\exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right) \geqslant 1$.

Par propriété de croissance de l'intégrale,

$$L_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ L_n \geqslant \frac{\pi}{4}}$.

(f) La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

D'autre part, la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (d'après la question 2.(*c*)), donc elle converge également.

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n)$ existe donc

On sait que :

— Pour tout $n \geqslant 1$, $K_n \geqslant 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n \geqslant 0$.

— Pour tout $n \geqslant 1$, $L_n \geqslant \frac{\pi}{4}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n \geqslant \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n) \geqslant \frac{\pi}{4}}$

3. (a) $K_n + L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\,\mathrm{d}x$ d'après la relation de Chasles.

Le changement de variable $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(\tan(x))}{2n}\right)$ est bijectif, de classe C^1, strictement croissant de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $]0, +\infty[$.

On a

$$u^{2n} = \tan(x) \Rightarrow 2nu^{2n-1}\mathrm{d}u = (1 + \tan^2(x))\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2nu^{2n-1}}{1 + u^{4n}}\mathrm{d}u$$

Donc $K_n + L_n = \int_0^{+\infty} u \times \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}\mathrm{d}u$, et finalement

$$\boxed{K_n + L_n = 2n\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1 + u^{4n}}\mathrm{d}u}$$

(b) La question précédente nous permet d'affirmer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{K_n + L_n}{2n}$

Si on note $H = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n)$, alors $H \neq 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_n + L_n) \geqslant \frac{\pi}{4}$,

donc $\frac{K_n + L_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} H$, et finalement $\boxed{H_n \sim \frac{H}{n}}$.

Corrigé de l'exercice 3

Partie I

1. (a) i. Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont évidemment stables par f. Il sont au nombre de deux car E n'est pas réduit au vecteur nul, par hypothèse.

ii. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si f admet un troisième sous-espace stable F alors F est une droite. Notons $u = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul engendrant F.

Il existe alors un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$. Donc $u_2 = \lambda u_1$ et $u_1 = -\lambda u_2$. On en déduit que $(1 + \lambda^2)u_2 = 0$. Donc $u_2 = 0$ puis $u_1 = 0$ et ainsi $u = 0$ ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ qui n'admet que deux sous-espaces stables.}}$

(b) i. — $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par f.
Or f est non nul et non injectif. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ n'est ni E ni $\{0\}$.
$\boxed{\text{Ainsi } \mathrm{Ker}(f) \text{ est un troisième sous-espace stable.}}$
Si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont distincts, alors f admet quatre sous-espaces stables.

— Si n est impair, d'après le théorème du rang $\mathrm{Rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = n$ impair. Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Im}(f)$.
$\boxed{\text{Ainsi si } n \text{ est impair, } f \text{ admet au moins 4 sous-espaces stables.}}$

ii. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$. Donc f admet trois sous-espaces stables.

Si f admet un autre sous-stable différent de E et de $\{0\}$, alors ce sous-espace stable est de dimension 1 donc engendré par un vecteur $u = (u_1, u_2)$.

Alors $f(u)$ s'écrit $\lambda(u_1, u_2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ mais également $f(u) = (u_2, 0)$.

Ainsi $u_1 = u_2 = 0$. Donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$.

Finalement $\boxed{f \text{ admet exactement trois sous-espaces stables.}}$

2. (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$, on a alors $f(x) = \lambda x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \text{ est stable par } f.}$

(b) Soit $\mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$ un sous-espace de dimension au moins 2.
Alors il existe e_1 et e_2 deux vecteurs propres non colinéaires éléments de $\mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$.

Soit α de $\mathbb{K}$, on a

$$f(e_1 + \alpha e_2) = f(e_1) + \alpha f(e_2) = \lambda(e_1 + \alpha e_2)$$

Ainsi la droite vectorielle $D_\alpha = \mathrm{Vect}(e_1 + \alpha e_2)$ est stable par f.

Soit α et α' deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Alors les droites D_α et $D_{\alpha'}$ sont distinctes.

Ainsi $\boxed{\text{il existe alors une infinité de droites } D_\alpha \text{ stables par } f.}$

(c) Soit f un endomorphisme de E dont tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.
En particulier toutes les droites vectorielles sont stables par f.
Alors pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Soit deux vecteurs non nuls x et y de E.

i. Si x et y sont colinéaires, alors il existe un scalaire α tel que $y = \alpha x$.
alors

$$f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$$

d'où $\lambda_y = \lambda_x$ car y est non nul.

Ainsi $\boxed{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha x \text{ et } f(y) = \alpha y.}$

ii. On suppose que la famille (x, y) est libre. Alors

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda_x x+\lambda_y y$$

Ainsi $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x = (\lambda_y - \lambda_{x+y})y$.

Or la famille (x, y) est libre. Donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$.
Ainsi $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe } \alpha' \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha' x,\ f(y) = \alpha' y \text{ et } f(x+y) = \alpha'(x+y).}$

iii. On a montré il existe un scalaire λ tel que

$$\forall x \in E, x \neq 0, \qquad f(x) = \lambda x$$

Et cette égalité reste évidemment valable lorsque $x = 0$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est une homothétie.}}$

Partie II

1. (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

Soit x un élément de F. Alors il existe un unique p uplet $(x_1, \cdots x_p)$ de $(F \cap E_1) \times \cdots \times (F \cap E_p)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

D'où, par linéarité $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)$.

Or $x_i \in E_i$. Donc $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Les F_i étant des sous-espaces vectoriels on a, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i x_i \in F \cap E_i$. Donc $f(x) \in \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ ou encore $f(x) \in F$.

$\boxed{\text{Donc } F \text{ est stable par } f.}$

(b) Par hypothèse $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

x est aussi un élément de E. $\boxed{\text{Ainsi il existe une unique famille } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \text{ dans } E_1 \times \cdots \times E_p \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i.}$

(c) ⋆ Par définition la famille $\mathscr{B}_x$ est une famille génératrice de V_x.

⋆ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ la famille (x_i) est libre.

Les sous-espaces $E_1, \cdots, E_r$ sont en somme directe donc une concaténation de familles libre de chaque E_i est une famille libre de la somme.

Ainsi la famille $(x_1, \cdots x_r)$ est libre.

Finalement $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}_x \text{ est une base de } V_x.}$

(d) Pour $i \in [\![1, r]\!]$ on a $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Une récurrence immédiate sur $j \in \mathbb{N}^*$ montre que $f^{j-1}(x_i) = \lambda^{j-1} x_i$

Par linéarité $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i$.

$\boxed{\text{Donc } f^{j-1}(x) \in V_x.}$

Alors la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$ est la matrice de Vandermonde d'ordre r suivante

$$W := W(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

(e) Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(W)$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$. On a alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_r) = 0$.

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$ qui admet au moins r racines, c'est donc le polynôme nul. Aisi $A = 0$.

Puisque $\operatorname{Ker}(W) = \{0_{n,1}\}$ on en déduit que W est inversible et donc

$\boxed{(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r} \text{ est une base de } V_x.}$

(f) ⋄ Soit i un élément de $[\![1, r]\!]$.
Comme W est inversible, x_i s'écrit comme combinaison linéaire de $f^{j-1}(x)$.
Or F est stable par f. Donc pour tout entier j, $f^{j-1}(x)$ est un élément de F.
Donc x_i est un élément de F.
$\boxed{\text{Ainsi pour tout entier } i \text{ de } [\![1, r]\!],\ x_i \in F \cap E_i.}$

⋄ Ainsi pour tout vecteur x de F, $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ où $x_i \in F \cap E_i$.

Donc $F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

Or $\bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i) \subset F$. Donc $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

$$\boxed{\text{Finalement } F \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i).}$$

2. (a) Comme $p = n$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Donc $n = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_i \geqslant 1$.
$\boxed{\text{Donc tous les sous-espaces } E_i \text{ sont de dimension 1.}}$

(b) Soit D une droite stable par f.
Alors il existe un vecteur u non nul et un réel λ tels que $f(u) = \lambda u$. Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$.
Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E) = 1$. Donc $D = E_i$.
$\boxed{f \text{ admet donc exactement } n \text{ droites stables .}}$

(c) Soit F un sous-espace de E stable par f et de dimension k.

D'après la question 1., $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.

Comme les E_i sont des droites, leurs sous-espaces $F \cap E_i$ sont soit nuls, soit égaux à E_i.
Enfin, comme $\dim F = k$, il y exactement k indices $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $F \cap E_i = E_i$, et les autres vérifient $F \cap E_i = \{0\}$.
F est donc entièrement déterminé par le choix de k indices i parmi n.

$$\boxed{\text{Donc il existe } \binom{n}{k} \text{ sous-espaces de } E \text{ de dimension } k \text{ et stables par } f \text{ .}}$$

(d) Il suffit de les compter selon leur dimension $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Il existe } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ sous-espaces de } E \text{ stables par } f.}$$

Les sous-espaces stables par f sont $\bigoplus_{i \in K} E_i$, où K parcourt l'ensemble des parties finies de $[\![1, n]\!]$.

Corrigé de l'exercice 4

Partie I — Préliminaires

1. (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Il existe ainsi $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

   De plus on a
   $$0_E = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E$.

   D'après le théorème du rang on a $\dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E)$.

   En conclusion on a $\boxed{E = \mathrm{Ker}(p) \bigoplus \mathrm{Im}(p).}$

   (b) On va procéder par double inclusion

   — Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe alors $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

     Ainsi
     $$(\mathrm{Id} - p)(x) = x - p(x) = p(y) - p \circ p(y) = p(y) - p(y) = 0_E$$

     Et donc $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

     Ce qui montre que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$

   — Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(Id - p)$, on a donc $p(x) = x$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}(p)$.

     Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Im}(p)$.

   Finalement on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p).}$

   (c) Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ et $(e_{r_1} \cdots e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

   D'après les questions précédentes on a
   $$E = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \bigoplus \mathrm{Ker}(p)$$

   Ainsi la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ obtenue par concatenation est une base de E (et en particulier $p = n$).

   On sait que
   $$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad e_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p), \qquad \forall k \in [\![r+1, n]\!], \quad e_k \in \mathrm{Ker}(p)$$

   C'est-à-dire
   $$\boxed{\forall k \in [\![1, r]\!], \quad p(e_k) = e_k, \qquad \forall k \in [\![r+1, n]\!], \quad p(e_k) = 0_E}$$

   (d) Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on a alors
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \underbrace{0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots}_{\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p))} & & & & \underbrace{\cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 0}_{\dim(\mathrm{Ker}(p))} & & & \end{pmatrix}$$

   D'où
   $$\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \mathrm{rg}(p)$$

   On obtient bien $\boxed{\mathrm{Rg}(p) = \mathrm{Tr}(p).}$

2. On va procéder par récurrence sur n

   <u>Initialisation :</u>

   Il est clair que $\dim(E_1) \leqslant \dim(E_1)$

   <u>Hérédité :</u>

Soit $k \in \mathbb{N}$, et $E_1, \dots, E_k, E_{k+1}$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que

$$\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leqslant \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)$$

Notons $F = E_1 + \cdots + E_k$.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de E_{k+1}. Alors la famille $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_p)$ est une famille génératrice de $F + E_{k+1}$.

On a alors

$$\dim(F + E_{k+1}) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_p) \leqslant n + p$$

Ainsi

$$\dim(F + E_{k+1}) \leqslant \dim(F) + \dim(E_{k+1} \leqslant \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1})$$

Ce qui prouve la propriété voulue au rang $k + 1$.

Remarque

On aurait aussi pu utiliser la formule de Grassman appliquée à F et E_{k+1} pour prouver l'hérédité

Par principe de récurrence on a montré que

$\boxed{\text{si } E_1, \dots, E_k, \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E \text{ alors}}$

$$\boxed{\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leqslant \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)}$$

Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de deux projecteurs soit un projecteur

1. On suppose que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a alors

$$\begin{aligned} q \circ q &= (p_1 + p_2) \circ (p_1 + p_2) \\ &= p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 \\ &= p_1 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 \qquad \textit{par hypothèse} \\ &= p_1 + p_2 \qquad \textit{car } p_1 \textit{ et } p_2 \textit{ sont des projecteurs} \\ &= q \end{aligned}$$

Ainsi $q \circ q = q$, $\boxed{q \text{ est donc bien un projecteur.}}$

2. On suppose désormais que q est un projecteur.
   (a) Soit $y \in \operatorname{Im}(q)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = q(x)$.
   Ainsi $y = p_1(x) + p_2(x)$. Comme $p_1(x) \in \operatorname{Im}(p_1)$ et $p_2(x) \in \operatorname{Im}(p_2)$ on a donc $y \in \operatorname{Im}(p_1) + \operatorname{Im}(p_2)$
   On a ainsi montré que
   $$\boxed{\operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p_1) + \operatorname{Im}(p_2)}$$
   (b) On sait que q, $_1$ et p_2 sont des projecteurs, ainsi, d'après la question 1.(d) de la partie I on a $\operatorname{Rang}(q) = \operatorname{Tr}(q)$, $\operatorname{Rang}(p_1) = \operatorname{Tr}(p_1)$ et $\operatorname{Rang}(p_2) = \operatorname{Tr}(p_2)$.
   D'où
   $$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(q) &= \operatorname{Tr}(q) \\ &= \operatorname{Tr}(p_1 + p_2) \\ &= \operatorname{Tr}(p_1) + \operatorname{Tr}(p_2) \qquad \textit{car l'application Trace est linéaire} \\ &= \operatorname{Rang}(p_1) + \operatorname{Rang}(p_2) \end{aligned}$$
   Ainsi
   $$\boxed{\operatorname{Rang}(q) = \operatorname{Rang}(p_1) + \operatorname{Rang}(p_2)}$$
   La question 2. de la partie I appliquée aux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(p_1)$ et $\operatorname{Im}(p_2)$ nous assure que
   $$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(p_1) + \operatorname{Im}(p_2)) \leqslant \dim(\operatorname{Im}(p_1)) + \dim(\operatorname{Im}(p_2))}$$

(c) On sait déjà que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$, il nous suffit donc de montrer que $\dim(\mathrm{Im}(q)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2))$.

Comme $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$ alors $\dim(\mathrm{Im}(q)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2))$

De plus on a

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(q)) &= \mathrm{Rang}(q)\\ &= \mathrm{Rang}(p_1)+\mathrm{Rang}(p_2)\\ &= \dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2))\\ &\geqslant \dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2))\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\dim(\mathrm{Im}(q)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2))$ et donc que

$$\boxed{\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)}$$

Par conséquent on a $\dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2)) = \dim(\mathrm{Im}(q)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2))$ et ainsi

$$\boxed{\mathrm{Im}(p_1+p_2) = \mathrm{Im}(p_1)\bigoplus\mathrm{Im}(p_2)}$$

3. (a) Soit $x \in E$, comme q est un projecteur on a $\mathrm{Ker}(q-\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(q)$.

Or $p_1(x) \in \mathrm{Im}(p_1) \subset \mathrm{Im}(p_1)\bigoplus\mathrm{Im}(p_2) = \mathrm{Im}(q)$. Ainsi

$$\boxed{p_1(x) \in \mathrm{Ker}(q-\mathrm{Id})}$$

(b) On a montré que, pour tout $x \in E$, $p_1(x) \in \mathrm{Ker}(q-\mathrm{Id})$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in E, \qquad q(p_1(x)) - p_1(x) = 0_E$$

Ainsi

$$\forall x \in E, \qquad (q \circ p_1)(x) = p_1(x)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{q \circ p_1 = p_1}$$

En reprenant ces arguments en remplaçant p_1 par p_2 on prouve mutatis mutandis que

$$\boxed{q \circ p_2 = p_2}$$

(c) On a

$$p_1 = q \circ p_1 = (p_1+p_2)\circ p_1 = p_1 \circ p_1 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2 \circ p_1$$

Ainsi $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ De même

$$p_2 = q \circ p_2 = (p_1+p_2)\circ p_2 = p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_2 = p_1 \circ p_2 + p_2$$

et donc $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Finalement on a bien

$$\boxed{p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

4. On a montré que, si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q est un projecteur et que, si q est un projecteur alors $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On en conclut donc que

$$\boxed{q \text{ est un projecteur} \qquad \text{si et seulement si} \qquad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

Partie III — Généralisation

1. On suppose que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$. On a alors

$$\begin{aligned}
q_k \circ q_k &= \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \circ q_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \circ q_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} p_i \circ p_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \circ p_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} p_i \circ p_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \theta \\
&= q_k + \theta \\
&= q_k
\end{aligned}$$

On a donc $q_k \circ q_k = q_k$. $\boxed{q_k \text{ est donc un projecteur.}}$

2. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(q_k)$, et soit $y \in E$ tel que $x = q_k(y)$.

   On a alors
$$x = q_k(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(y)$$
   Ainsi $x \in \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$.

   On a donc bien
$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)}$$

   (b) On a
$$\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(q_k)) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)\right)$$

   De plus, comme q_k et les applications linéaires $(p_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ sont des projecteurs, on a, d'après la question 1.(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(q_k) &= \mathrm{Tr}(q_k) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Im}(p_i)) \\
&\geqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)\right) \qquad \textit{d'après la question } 2.
\end{aligned}$$

   On a ainsi montré que
$$\boxed{\mathrm{rg}(q_k) = \dim\left(\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)\right)}$$

On sait que $\mathrm{Im}(q_k) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$ et

$$\dim\left(\mathrm{Im}(q_k)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)}$$

(c) On a vu que

$$\mathrm{rg}(q_k) = \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Im}(p_i)) \leqslant \mathrm{rg}(q_k)$$

Ainsi

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Im}(p_i))$$

La somme $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$ est donc une somme directe, d'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \bigoplus \ldots \bigoplus \mathrm{Im}(p_k)}$$

3. (a) Soit $j \in [\![1, k]\!]$.

D'après la question précédente on a

$$\mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Im}(p_1) \bigoplus \ldots \bigoplus \mathrm{Im}(p_k) \subset \mathrm{Im}(q_k)$$

Comme q_k est un projecteur, on a $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Ker}(Id - q_k)$.

Ainsi,

$$\forall x \in E, \qquad p_j(x) \in \mathrm{Ker}(Id - q_k)$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in E, \qquad p_j(x) = q_k \circ p_j(x)$$

où encore $\boxed{p_j = q_k \circ p_j.}$

(b) Soit $j \in [\![1, k]\!]$ et $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} p_j(x) &= q_k \circ p_j(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \circ p_j(x) \\ &= p_j \circ p_j(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) \\ &= p_j(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0$.

On a donc montré que

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!], \quad \forall x \in E, \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\left(p_j(x)\right) = 0}$$

(c) Soit $x \in E$, d'après la question précédente on a

$$\underbrace{p_1(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_1)} + \underbrace{p_2(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_2)} + \ldots + \underbrace{p_{j-1}(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_{j-1})} + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_j)} + \underbrace{p_{j+1}(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_{j+1})} + \ldots + \underbrace{p_k(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_k)} = 0_E$$

et

$$\underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_1)} + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_2)} + \ldots + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_{j-1})} + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_j)} + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_{j+1})} + \ldots + \underbrace{0_E}_{\in \mathrm{Im}(p_k)} = 0_E$$

Or la somme $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_k)$ est une somme directe, ainsi, par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \forall i \in [\![1, k]\!], \qquad j \neq i \ \Rightarrow p_i \circ p_j(x) = 0$$

Ainsi

$\boxed{\text{Pour tout couple } (i, j) \text{ de } [\![1, k]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j, \text{ on a } p_i \circ p_j = \theta.}$

4. On a montré à la question 3 que, si pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$ alors q_k est un projecteur.

   On vient de montrer que, si q_k est un projecteur alors, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

   En conclusion

   $\boxed{q_k \text{ est un projecteur si et seulement si pour tout couple } (i, j) \text{ de } [\![1, k]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j, \text{ on a } p_i \circ p_j = \theta.}$